

Universal enveloping algebras of low dimensional lie algebras, bernoulli numbers and $U[q](sl[2])$

著者	村田 駿祐
内容記述	Thesis (Ph. D. in Science)--University of Tsukuba, (A), no. 5254, 2010.3.25 On t.p. "[p]" and "[2]" are subscript Includes bibliographical references
発行年	2010
URL	http://hdl.handle.net/2241/105483

氏 名 (本籍)

村 田 駿 祐 (埼 玉 県)

学 位 の 種 類

博 士 (理 学)

学 位 記 番 号

博 甲 第 5254 号

学位授与年月日

平成 22 年 3 月 25 日

学位授与の要件

学位規則第 4 条第 1 項該当

審 査 研 究 科

数理解物質科学研究科

学 位 論 文 題 目

Universal Enveloping Algebras of Low Dimensional Lie Algebras, Bernoulli Numbers and $Uq(sl_2)$

(低次元リー代数の包絡代数、ベルヌーイ数および $Uq(sl_2)$)

主 査

筑波大学教授

理学博士

森 田 純

副 査

筑波大学教授

理学博士

木 村 達 雄

副 査

筑波大学教授

理学博士

竹 内 光 弘

副 査

筑波大学教授

理学博士

加 藤 久 男

論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文では、3次元リー代数の包絡代数および量子群 $U_q(sl_2)$ において、種々の新しい関係式を研究し、それらを基にして代数構造の解明に役立てている。特に、ベルヌーイ数が係数に出てくることを、複雑な数式の中から見出すことに成功した。

本論文は大きく 2 つの部分に分かれる。包絡代数と非可換多項式を扱った部分、および量子群を扱った部分である。基本的には、両者において扱われている数式は関連していて、大まかにいうと、前者の関係式を変形したものが後者のそれになっている。ここでは前者に重きをおいて述べる。

研究の経緯に沿うと、まず 3 次元 (あるいは低次元) リー代数の分類理論があり、その分類に応じてリー代数の生成元の取り方と包絡代数における関係式の係数変化に着目し研究している。そして、その係数変化の具合によるリー代数の特徴付けが行われている。特に、最も重要なリー代数である 3 次元単純リー代数 sl_2 とハイゼンベルグ・リー代数に関しては、その特徴付けが綺麗に得られている。

そして、ある一つの 3 次元リー代数を扱う中で、その非常に複雑な係数変化の中から、そこに二項係数とベルヌーイ数を組み合わせた量が現われていることを見出し、今まで予想されていなかった新しい形にまとめ上げること成功している。手計算により係数変化を把握しようとする、複雑な式変形の中で全く見当もつかない状態になってしまうが、専門的な数式処理ソフトを用いた高速計算プログラムによる数値実験を繰り返しながら、各項の係数変化を地道に追うことを続けた結果、係数の変化がベルヌーイ数と非常に深く関係しているという事実に至った。また、式変形全体を見直すことにより、3 次元というよりは実は 2 次元リー代数に話が帰着されることが明らかにされ、最終的には 2 変数非可換多項式の計算に議論を持ち込めばよいという結論が導かれている。そしてその設定の中で生じる複雑な関係式の係数に、ベルヌーイ数が出現することが示されている。

証明自体は誠に複雑になるであろうと予想されたが、ベルヌーイ数の漸化式を用いて、比較的短い簡潔な証明が与えられている。これはその後、母関数を用いればさらに明解になることが指摘され、ベルヌーイ数が出てくる自然な仕組みの解明に役立っている。その仕組みと、そもそものリー代数の関係式の相性が非常

に良かったことが、リー代数とベルヌーイ数の間の新しい関係が発見された大きな理由となっている。

また、量子群においても、表現論の観点から、類似の関係式が考察されていたが、その計算を推し進め、ある種の基底の存在定理を示し、それを用いて、包絡代数と量子群の間の関係を記述する方法を提示した。新たな基底を用いて線形写像を具体的に構成することにより、今までにない見方を与えている。

ここでは、先行研究で行われていた包絡代数における関係式との比較検討を行いながら、そこで生成系として与えられていた元のうち、基底になるための条件を導き出し、包絡代数との類似性をうまく利用することによって、非常に扱い易い形の基底を決定している。それによって得られた基底どうしは整合性が高く、それらをうまく対応させることにより、線形写像が構成できることを示している。さらに、この写像は関係式とも整合性が高いものとなっている。従って、量子群と包絡代数の間の対応関係について、通常とは異なる、とても分かり易い意味づけを与えることにも成功している。これは代数的な解釈として、とても綺麗な結果となっている。

審 査 の 結 果 の 要 旨

包絡代数における関係式の係数変化を制御することにより、リー代数の構造を特徴づけることに成功したこと、包絡代数の関係式の中に新たな形でベルヌーイ数が出てくることを発見したこと、その事実を2変数多項式の関係式の中で改めて定式化したこと、量子群の新しい基底を構成し量子群と包絡代数の関係を解明したこと、これらの一連の研究では価値ある新しい事実が発見されており、非常に優れたものであると認められる。よって、本論文は博士論文として十分なレベルに達していると判断される。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。